ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 7^{η} ΔΕΚΑΔΑ

61.

Να αποδείξετε ότι **α)** ημ70^{o} ημ110^{o} – συν70^{o} συν110^{o} = 1

β) ημ^{4}ω – συν^{4}ω = 2ημ^{2}ω – 1

Προτεινόμενη λύση

α)

Επειδή 70^{o} + 110^{o} = 180^{o}, έχουμε ότι ημ110^{o} = ημ70^{o} και συν110^{o} = – συν70^{o}

Συνεπώς ημ70^{o} ημ110^{o} – συν70^{o} συν110^{o} = ημ70^{o} ημ70^{o} – συν70^{o} (– συν70^{o}) =

= ημ^{2}70^{o} + συν^{2}70^{o} = 1

β)

ημ^{4}ω – συν^{4}ω = (ημ^{2}ω – συν^{2}ω)(ημ^{2}ω + συν^{2}ω) =

= [ημ^{2}ω – (1– ημ^{2}ω)]·1 =

= ημ^{2}ω – 1+ ημ^{2}ω = 2ημ^{2}ω – 1

62 .

α) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \dfrac{x-2}{4}-1=\dfrac{2(y+1)}{3} \\ 4x+y+8=2(y-x) \end{cases}$

β) Αν x = – 2 και y = – 4 , να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο (x , y) και είναι παράλληλη στον άξονα των y.

Προτεινόμενη λύση

α)

$\begin{cases} \dfrac{x-2}{4}-1=\dfrac{2(y+1)}{3} \\ 4x+y+8=2(y-x) \end{cases}$ άρα $\begin{cases} 12\cdot\dfrac{x-2}{4}-1\cdot 12=12\cdot\dfrac{2(y+1)}{3} \\ 4x+y+8=2y-2x \end{cases}$

$$\begin{cases} 3(x-2)-12=8(y+1) \\ 4x+y+8=2y-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-6-12=8y+8 \\ 4x+y+8=2y-2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-8y=26 \\ 6x-y=-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x-8y=26 & \cdot\ -1 \\ 6x-y=-8 & \cdot\ \ 8 \end{cases}$$

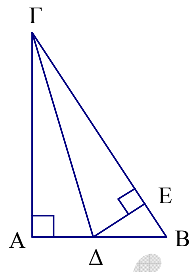
$$\begin{cases} -3x+8y=-26 \\ 48x-8y=-64 \end{cases}$$

$\begin{cases} 45x=-90 \\ 6x-y=-8 \end{cases}$ άρα $\begin{cases} x=-2 \\ -12-y=-8 \end{cases}$ άρα $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$

netsuccess.gr

β)
Η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση την $x = -2$

63.



Στο διπλανό σχήμα είναι $\hat{A} = 90^o$, $ΔΕ \perp ΒΓ$ και $ΑΓ = ΓΕ$

Δείξτε ότι : **α)** Η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$
β) Το Δ ισαπέχει από τις ΑΓ και ΒΓ
γ) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΒ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία των ομολόγων πλευρών.

Προτεινόμενη λύση

α)
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΕ έχουν ΑΓ = ΓΕ από την υπόθεση και την ΓΔ κοινή, άρα είναι ίσα .

Οπότε θα είναι και $Α\hat{Γ}Δ = Δ\hat{Γ}Β$, επομένως η ΓΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$.

β)
Επειδή το Δ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{Γ}$, θα ισαπέχει από τις πλευές της γωνίας , δηλαδή από τις ΑΓ και ΒΓ.

γ)
Επειδή τα τρίγωνα είναι ορθογώνια και έχουν την γωνία $\hat{B}$ κοινή , είναι όμοια.

Η αναλογία των ομολόγων πλευρών είναι $\dfrac{ΒΓ}{ΔΒ} = \dfrac{ΑΓ}{ΔΕ} = \dfrac{ΑΒ}{ΕΒ}$

64.

α) Να αποδείξετε ότι $(2x + 1)^2 + (x + 3)(x-3) - 5x^2 = 4x - 8$

β) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{(2x+1)^2+(x+3)(x-3)-5x^2}{x^2-x} + \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{2x+12}{x-1}$

Προτεινόμενη λύση

α)
$(2x + 1)^2 + (x + 3)(x-3) - 5x^2 = 4x^2 + 4x + 1 + x^2 - 9 - 5x^2 = 4x - 8$

β)
$\dfrac{(2x+1)^2+(x+3)(x-3)-5x^2}{x^2-x} + \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{2x+12}{x-1}$ με βάση το (α)

$\dfrac{4x-8}{x^2-x} + \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{2x+12}{x-1}$ άρα $\dfrac{4x-8}{x(x-1)} + \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{2x+12}{x-1}$ ΕΚΠ = $x(x-1) \neq 0$

άρα $x \neq 0$ και $x \neq 1$

$$x(x-1)\frac{4x-8}{x(x-1)} + x(x-1)\frac{x+2}{x} = x(x-1)\frac{2x+12}{x-1}$$

$$4x - 8 + (x-1)(x+2) = x(2x+12)$$

$$4x - 8 + x^2 + 2x - x - 2 = 2x^2 + 12x$$

$x^2 + 7x + 10 = 0$ με $Δ = 9$ και ρίζες $x = -5$ ή $x = -2$

65.

Δίνεται η παραβολή $y = x^2 + 3x + \lambda$ η οποία διέρχεται από το σημείο $A(1\ ,7)$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ.

β) Για $\lambda = 3$ να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής και τον άξονα συμμετρίας της .

γ) Να αποδείξετε ότι η παραβολή δεν τέμνει τον άξονα των x.

Προτεινόμενη λύση

α)

Αφού η παραβολή διέρχεται από το σημείο $A(1\ ,7)$, ισχύει $7 = 1 + 3 + \lambda$ άρα $\lambda = 3$

Η παραβολή γίνεται $y = x^2 + 3x + 3$

β)

Κορυφή της παραβολής είναι το σημείο Κ με συντεταγμένες $K\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\ ,\ \frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$

Όμως $\frac{-\beta}{2\alpha} = -\frac{3}{2}$ και $-\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{3^2-3\cdot 4}{4} = \frac{3}{4}$. Άρα $K\left(-\frac{3}{2}\ ,\ \frac{3}{4}\right)$

Άξονας συμμετρίας είναι η ευθεία $x = \frac{-\beta}{2\alpha} = -\frac{3}{2}$

γ)

Επειδή $\Delta = -3 < 0$, η παραβολή δεν τέμνει τον άξονα των x.

66.

α) Να γίνουν γινόμενο παραγόντων τα παρακάτω πολυώνυμα

$A = x^3 - 5x^2 + 4x$ $\qquad B = \alpha x + \alpha + x^2 + 2x + 1$

$\Gamma = x^4 - 16x^2$ $\qquad \Delta = x^4 - 17x^2 + 16$

β) Να λυθεί η εξίσωση $A = \Delta$

Προτεινόμενη λύση

α)

$A = x^3 - 5x^2 + 4x = x(x^2 - 5x + 4) = x(x-4)(x-1)$

$B = \alpha x + \alpha + x^2 + 2x + 1 = \alpha(x+1) + (x+1)^2 = (x+1)(\alpha + x + 1)$

$\Gamma = x^4 - 16x^2 = x^2(x^2 - 16) = x^2(x-4)(x+4)$

$$\begin{aligned}\Delta = x^4 - 17x^2 + 16 &= x^4 - x^2 - 16x^2 + 16 = \\ &= x^2(x^2-1) - 16(x^2-1) = \\ &= (x^2-1)(x^2-16) = \\ &= (x-1)(x+1)(x-4)(x+4)\end{aligned}$$

β)

$A = \Delta$ άρα

$$\begin{aligned}&x(x-4)(x-1) = (x-1)(x+1)(x-4)(x+4)\\ &x(x-4)(x-1) - (x-1)(x+1)(x-4)(x+4) = 0\\ &(x-4)(x-1)[x-(x+1)(x+4)] = 0\\ &(x-4)(x-1)(x-x^2-4x-x-4) = 0\\ &(x-4)(x-1)(-x^2-4x-4) = 0\\ &-(x-4)(x-1)(x^2+4x+4) = 0\\ &-(x-4)(x-1)(x+2)^2 = 0\\ &x-4=0 \quad ή \quad x-1=0 \quad ή \quad x+2=0\\ &x=4 \quad ή \quad x=1 \quad ή \quad x=-2 \ (\text{διπλή})\end{aligned}$$

netsuccess.gr

67.

Έστω $\Omega = \{x \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $0 \le x \le 20\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα :

$A = \{x \in \Omega$ και x = περιττός$\}$ και $B = \{x \in \Omega$ και x = πολλαπλάσιο του 3$\}$

α) Να γράψετε τα Ω, A και B με αναγραφή των στοιχείων τους.

β) Επιλέγουμε στην τύχη ένα στοιχείο του Ω. Να βρείτε τις πιθανότητες :

$P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A')$

Προτεινόμενη λύση

α)

$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

$B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

β)

$P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{10}{21}$, $\quad P(B) = \dfrac{N(B)}{N(\Omega)} = \dfrac{7}{21}$

$A \cap B = \{3, 9, 15\}$ οπότε $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{3}{21} = \dfrac{1}{7}$

$A' = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ οπότε $P(A') = \dfrac{N(A')}{N(\Omega)} = \dfrac{11}{21}$

68.

Για την αμβλεία γωνία ω δίνεται ότι $ημω = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

α) Δείξτε ότι $συνω = -\dfrac{1}{2}$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{\left(2συνω - \sqrt{3}ημω\right)}{2εφ^2ω}$

Προτεινόμενη λύση

α)

$ημ^2ω + συν^2ω = 1$ άρα $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + συν^2ω = 1$

$\dfrac{3}{4} + συν^2ω = 1$

$συν^2ω = 1 - \dfrac{3}{4}$

$συν^2ω = \dfrac{1}{4}$ άρα $συνω = \pm\dfrac{1}{2}$

Και επειδή ω αμβλεία , είναι $συνω = -\dfrac{1}{2}$

netsuccess.gr

β)

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \quad \text{οπότε} \quad A = \frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot(-\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{-1-\frac{3}{2}}{2\cdot 3} = \frac{-\frac{5}{2}}{6} = -\frac{5}{12}$$

69.

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$

α) Να βρείτε τα $P(-1)$ και $P(1)$.

β) Αν $P(-1) = 0$ και $P(1) = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των α και β.

γ) Αν $\alpha = 3$ και $\beta = 5$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

Προτεινόμενη λύση

α)

$P(-1) = \alpha(-1)^3 + (\beta - 1)(-1)^2 - 3(-1) - 2\beta + 6 = -\alpha + \beta - 1 + 3 - 2\beta + 6 =$
$= -\alpha - \beta + 8$

$P(1) = \alpha\cdot 1^3 + (\beta - 1)\cdot 1^2 - 3\cdot 1 - 2\beta + 6 = \alpha + \beta - 1 - 3 - 2\beta + 6 = \alpha - \beta + 2$

β)

$P(-1) = 0$ και $P(1) = 0$ τότε $-\alpha - \beta + 8 = 0$ και $\alpha - \beta + 2 = 0$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε $-2\beta + 10 = 0$ άρα $\beta = 5$

Και από την $\alpha - \beta + 2 = 0$, αφού $\beta = 5$, βρίσκουμε $\alpha = 3$

γ)

Για $\alpha = 3$ και $\beta = 5$ είναι $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 3x - 4$

Οπότε $P(x) = 0$ άρα $3x^3 + 4x^2 - 3x - 4 = 0$

$x^2(3x + 4) - (3x + 4) = 0$

$(3x + 4)(x^2 - 1) = 0$ άρα

$(3x + 4)(x - 1)(x + 1) = 0$

$3x + 4 = 0$ ή $x - 1 = 0$ ή $x + 1 = 0$

$x = -\frac{4}{3}$ ή $x = 1$ ή $x = -1$

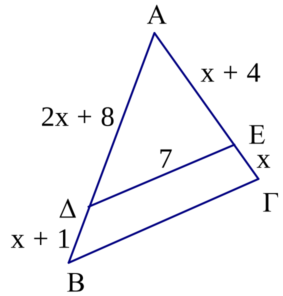
netsuccess.gr

70.

Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΕ // ΒΓ

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια .

β) Αν ΑΔ = 2x + 8 , ΔΒ = x + 1 , ΑΕ = x + 4 , ΕΓ = x και ΔΕ = 7 , να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.



Προτεινόμενη λύση

α)

Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια διότι έχουν $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$ ως εντός εκτός των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ και την $\widehat{A}$ κοινή.

β)

Επειδή οι ομόλογες πλευρές βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες, η αναλογία των ομολόγων πλευρών είναι η $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{AE} = \frac{B\Gamma}{\Delta E}$

Όμως ΑΒ = ΑΔ + ΔΒ = 2x + 8 + x + 1 = 3x + 9

ΑΓ = ΑΕ + ΕΓ = x + 4 + x = 2x + 4 και ΔΕ = 7

Οπότε η αναλογία γίνεται $\frac{3x+9}{2x+8} = \frac{2x+4}{x+4} = \frac{B\Gamma}{7}$ **(1)**

Η (1) δίνει $\frac{3x+9}{2x+8} = \frac{2x+4}{x+4}$ άρα $\frac{3x+9}{2(x+4)} = \frac{2x+4}{x+4}$ με $x \neq -4$ έχουμε

$$2(x+4)\frac{3x+9}{2(x+4)} = 2(x+4)\frac{2x+4}{x+4}$$

$$3x + 9 = 2(2x + 4)$$

$$3x + 9 = 4x + 8 \quad \text{άρα} \quad x = 1$$

Επομένως ΑΒ = 3 + 9 = 12 , ΑΓ = 2 + 4 = 6 , ΑΔ = 2 + 8 = 10 , ΑΕ = 1 + 4 = 5

Από την (1) για x = 1 βρίσκουμε ΒΓ = 8,4

netsuccess.gr